

## Kalibrácia a testovanie gravitačného modelu na migračných dátach

J. PAULOV, Š. POLÁČIK

(Za cenné pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu štúdie, vyjadrujú autori vďaka RNDr. A. BEZÁKOVI, pracovníkovi Geografického ústavu SAV)

### Úvod

Problematike kalibrácie a testovania priestorových modelov sa v geografickej literatúre venuje stále väčšia pozornosť. Táto tendencia je celkom pochopiteľná; vnútorne logicky súvisí a je prirodzeným rozvíjaním „modelovej revolúcie“ v geografii. Vzrast záujmu o kalibráciu a testovanie však vychádza aj z ďalších pohľadov. Priestorové modely ako teoretické konštrukty a nástroje poznávania sa stávajú čím ďalej tým viac nevyhnutným podkladom kvalifikovaného územného a oblastného (regionálneho) plánovania. Kalibrácia a testovanie majú ukázať, do akej miery korešponduje model s realitou, aká je jeho „empirická sila“, či predikčná schopnosť, a teda i naznačiť, do akej miery ten či onen model „uprednostniť“ pred iným modelom, prípadne vystopovať, v čom sú jeho prednosti a nedostatky voči inému modelu.

Techniky kalibrácie a testovania rýchlo narastajú čo do počtu, zložitosti a matematickej náročnosti. Súčasne vzrastá náročnosť techník na modernú výpočtovú techniku. Hľadajú sa stále citlivejšie a adekvátnejšie techniky, pretože nevhodná technika môže viesť k neodôvodnenému odmietaniu istého modelu.

Cieľom našej štúdie je kalibrácia a testovanie dvoch foriem gravitačného modelu (GM), a to mocninového gravitačného modelu (MGM) a exponenciálneho gravitačného modelu (EGM). Rozlíšenie tu robíme v závislosti od matematickej formy funkcie vzdialenosti. Naša štúdia však zďaleka nevyčerpáva všetky možné spôsoby kalibrácie a testovania uvedeného modelu, preto ju treba skôr chápať ako istý úvod do tejto problematiky. Súvisí to do istej miery i s tým, že v našej publikovanej literatúre neexistuje, resp. nie je nám známa štúdia, ktorá by sa zaoberala problematikou kalibrácie a testovania priestorových modelov, či špeciálne gravitačného modelu na konkrétnych číselných dátach. Dáta, ktoré sme použili v tejto štúdii, sú dáta o migrácii medzi československými krajinami v jednotlivých rokoch intervalu 1961 - 1965,

### 1. Gravitačný model

Gravitačný model možno snáď dnes už považovať za klasický nástroj kvantitatívnej analýzy priestorovej interakcie. Mohlo by sa preto zdať, že problematika „okolo“ tohto modelu je dnes už viac-menej vykryštalizovaná, jeho teoretické a aplikačné možnosti v zásade dobre známe. V skutočnosti však gravitačný model prežíva toho času akoby istú renesanciu; vynárajú sa nové možnosti v súvislosti s jeho odvodením, jeho rôznymi formami a aplikačnými možnosťami.

Načrtnime zhruba princíp modelovania priestorovej interakcie pomocou gravitačného modelu. „Gravitačnú“ hypotézu možno v modelovom tvare zapísať najvšeobecnejšie nasledujúcim spôsobom (WILSON A. G. 1974, s. 67):

$$\text{Interakcia} = \text{koeficient}(y) \times \text{masa} \times \text{masa} \times \text{funkcia vzdialenosti} \quad (1)$$

Vzťah (1) možno symbolicky zapísať takto:

$$T_{ii} = KM_i^{(1)}M_j^{(2)}f(c_{ij}), \quad (2)$$

resp.

$$T_{ij} = A_iB_jO_iD_jf(c_{ij}) \quad (3)$$

Symbole použité vo vzťahu (2) a (3) sú zrejme jednak zo vzťahu (1), jednak sa stanú bližšie zrejme z ďalšieho kontextu.

Interakciu, ktorá je v uvedených vzťahoch východiskovým pojmom, chápeme v kontexte našej štúdie ako zovšeobecňujúci pojem pre najrozmanitejšie druhy kontaktov (väzieb) medzi územnými jednotkami. Ide napr. o kontakty (väzby) realizované prostredníctvom premiestňovania osôb (migrácia, dochádzka do práce, za službami a pod.), resp. premiestňovania materiálov (tovary, suroviny a pod.), prípadne kontakty informačného charakteru (telefónne hovory, listové zásielky a pod.) atď. Jednoduchý a ekonomický spôsob záznamu interakcie predstavuje matica, ktorej jednotlivé prvky budeme symbolicky označovať  $T_{ij}$ . Hodnotou  $T_{ij}$  vyjadrujeme veľkosť interakcie medzi východiskovou územnou jednotkou  $X_i$  a cieľovou územnou jednotkou  $Y_j$  (napr. počet migrujúcich osôb z oblasti  $X_i$  do oblasti  $Y_j$ ). Takúto maticu budeme nazývať interakčnou maticou  $[T_{ij}]_{i,j}^{m,n}$  (bližšie pozri PAULOV J. 1975). So všeobecným tvarom GM, daným vzťahmi (1), (2), (3), korešpondujú rôzne špecifické podoby. Všimnime si niektoré z nich:

$$T_{ij} = K \frac{M_i^{(1)} M_j^{(2)}}{c_{ij}^2}, \quad (4)$$

$T_{ij}$ : interakcia medzi územnými jednotkami,

$K$ : empiricky odvoditeľná konštanta (parameter),

$M_i^{(1)} M_j^{(2)}$ : miery masy (napr. počet obyvateľstva a pod.) príslušných územných jednotiek, medzi ktorými sa sleduje interakcia,

$c_{ij}$ : generalizovaná miera vzdialenosti medzi príslušnými územnými jednotkami (napr. km, čas, náklady a pod.).

Vzťah (4) predstavuje, ako vidíme, dokonalú formálnu analógiu s newtonovskou gravitáciou z fyziky.

Pri kalibrácii a testovaní vzťahu (4) sa ukázala potreba nahradiť výraz  $c_{ij}^2$  všeobecnejším výrazom  $c_{ij}^\alpha$ , kde  $\alpha$  je empiricky odvoditeľná konštanta (parameter), ktorá je meradlom „brzdiacej sily“ vzdialenosti v interakčnom procese. Tento modifikovaný tvar GM možno preto zapísať ako

$$T_{ij} = K \frac{M_i^{(1)} M_j^{(2)}}{c_{ij}^\alpha} \quad (5)$$

Vo vzťahu (4) a (5) sa však hodnoty  $M_i^{(1)}$  a  $M_j^{(2)}$  často nahrádzujú hodnotami  $O_i$  a  $D_j$ , ktoré sú súčtami hodnôt  $T_{ij}$  príslušného riadku  $i$ , resp. stĺpca  $j$  interakčnej matice, t. j.  $\sum_j T_{ij} = O_i$  a  $\sum_i T_{ij} = D_j$ . Substitujúc tieto hodnoty do  $i$  i vzťahu (5) môžeme preto písať

$$T_{ij} = K \frac{O_i D_j}{c_{ij}^\alpha}, \quad (6)$$

V prípade, že požadujeme, aby platilo  $\sum_i \sum_j T_{ij} = N$ , kde  $N$  je dopredu zadaná hodnota (sumárna hodnota interakcie v celom systéme sledovaných územných jednotiek), bude pre  $K$  zo vzťahu (6) vyplývať

$$K = \frac{N}{\sum_i \sum_j O_i D_j c_{ij}^{-\alpha}}, \quad (7)$$

Všetky doteraz uvedené špeciálne podoby GM, t. j. (4), (5) a (6), však trpia na určitý „neprijemný“ efekt. V prípade, že s mierami masy, t. j.  $M_i^{(1)} M_j^{(2)}$ , resp.  $O_i$ ,  $D_j$ , uskutočníme pokus spočívajúci v ich zväčšení na dvojnásobok, budeme očakávať, že aj interakcia (t. j. hodnoty  $T_{ij}$ ) sa zväčší dvojnásobne. V skutočnosti sa však interakcia, vzhľadom na multiplikačnú závislosť, zväčší až štvornásobne. Tomuto „neprijemnému“ efektu možno sa vyhnúť tým spôsobom, že konštantu  $K$  nahradíme sériou konštánt  $A_i$  a  $B_j$ , ktoré sa viažu na jednotlivé riadky či stĺpce interakčnej matice, t. j. požadujeme, aby stále platilo  $\sum_j T_{ij} = O_i$  a  $\sum_i T_{ij} = D_j$ . Po tejto úprave nadobudne gravitačný model  $i$  nasledovnú podobu:

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j c_{ij}^{-\alpha} \quad (8)$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j c_{ij}^{-\alpha}}, \quad (9)$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i c_{ij}^{-\alpha}}, \quad (10)$$

Gravitačný model možno ďalej upravovať, napr. miery masy umocniť, avšak v kontexte našej štúdie nebudeme týmto rozmanitým úpravám (okrem funkcie vzdialenosti) venovať pozornosť.

Výrazný teoreticko-metodologický pokrok, ktorý bol podnetom k spomenutej renesancii GM, sa dosiahol v súvislosti so zavedením novej modelovacej techniky do regionálnej analýzy založenej na princípe maximalizácie entropie (WILSON A. G. 1967, 1970). Princíp maximalizácie entropie nebudeme v našej štúdiu bližšie rozvádzať, pretože bol už vysvetlený na inom mieste (PAULOV J. 1975). Jeho podstatu však možno stručne sformulovať takto: Maximalizuj entropiu za existujúcich zadaných podmienok! V prípade gravitačného modelu opisujúceho jeden typ interakcie, napr. migráciu medzi oblasťami (ktorá je predmetom nášho záujmu) to vedie k nasledujúcemu postupu:

$$W(\mathbf{T}) = \frac{N!}{\prod_i \prod_j T_{ij}!}, \quad (11)$$

$W(\mathbf{T})$ : počet mikrostavov systému (t. j. počet možných preskúpení osôb medzi oblasťami  $X_i$  a  $Y_j$ ) pri zadanej množine  $T = \{T_{ij}\}$ , kde  $T$  je množina všetkých  $T_{ij}$  sledovanej migračnej (interakčnej) matice,

$N$ : počet všetkých migrujúcich osôb v danom systéme oblastí, t. j.  $\sum_i \sum_j T_{ij} = N$

$T_{ij}$ : počet osôb migrujúcich z oblasti  $X_i$  do oblasti  $Y_j$ .

Zadané podmienky (obmedzenia):

$$\sum_j T_{ij} = O_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C, \quad (14)$$

$C_{ij}$ : dopravné náklady z oblasti  $X_i$  do oblasti  $Y_j$  (generalizovaná miera vzdialenosti),

$C$ : celkové dopravné náklady.

Maximalizácia výrazu (11), resp. jeho prirodzeného logaritmu, t. j.  $\ln W = S =$  entropia, za existujúcich zadaných podmienok, t. j. (12), (13) a (14), vedie k nasledovnému tvaru GM (WILSON A. G. 1970, s. 5):

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij}) \quad (15)$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j \exp(-\beta c_{ij})}, \quad (16)$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i \exp(-\beta c_{ij})}, \quad (17)$$

Ak porovnáme vzťah (8) so vzťahom (15), vidíme, že mocninová funkcia vzdialenosti ( $c_{ij}^{-\alpha}$ ) tu bola nahradená exponenciálnou funkciou [ $\exp(-\beta c_{ij})$ ]. Vzťah (8) môžeme preto nazvať MGM a vzťah (15) EGM.

Od EGM existuje prirodzená matematická cesta k MGM (WILSON A. G. 1974, s. 319). Ak podmienku (14) nahradíme podmienkou  $\sum_i \sum_j T_{ij} \ln c_{ij} = C$ , dovedie nás matematický postup uplatnený pri odvodení vzťahu (15) k vzťahu (8).

Vzťah (15), resp. (8), predstavuje tzv. východiskovo-cieľovo-väzbový GM, t. j. podmienky (12) a (13) sú viazané na východiská a ciele interakčného procesu. Je však možné vypustiť jednu z týchto podmienok (väzieb), čím dospejeme buď k východiskovo/väzbovému GM [pri vypustení väzby (13)] alebo k cieľovo-väzbovému GM [pri vypustení väzby (12)].

## 2. Kalibrácia a testovanie gravitačného modelu

Pod kalibráciou a testovaním budeme v kontexte tejto štúdie rozumieť jednak (a) estimáciu (odhad) parametrov modelu (BATTY M., MACKIE S. 1972), jednak (b) stanovenie zhody medzi skutočnými a modelom predikovanými hodnotami. Niektorí autori chápu kalibráciu v širšom zmysle, zahrňujúc do nej i empirickú interpretáciu premenných modelu (BEZÁK A. 1975). Tento krok sme v našom prípade uskutočnili už pri uvádzaní jednotlivých foriem GM. Obe procedúry — kalibrácia a testovanie — veľmi tesne navzájom súvisia, pretože už pri estimácii parametrov modelu sa najčastejšie postupuje tak, aby sa dosiahla čo možno najlepšia zhoda medzi skutočnými a modelom predikovanými hodnotami. Z toho dôvodu ťažisko nášho postupu bude spočívať v estimácii parametrov.

Ako sme už uviedli na začiatku našej štúdie, budeme kalibrovať a testovať ako MGM tak EGM, a to na dátach o migrácii medzi československými krajinami v jednotlivých rokoch intervalu 1961-1965. Tieto dáta, ktoré sú bežne dostupné v publikovaných štatistických ročenkách, sme do istej miery upravili v zmysle určitej agregácie (napr. Praha je agregovaná so Stredočeským krajom), takže v našej štúdii pracujeme s migračnými maticami 10 X 10, pričom v migračných maticiach sú zahrnuté i vnútrokrajové migračné toky, ktoré sme získali ako súčet medziokresných migračných tokov.

Predmetom kalibrácie a testovania sa stali štyri podoby GM, a to (5), (8), (15) a exponenciálna verzia formy (5), t. j.

$$T_{ij} = K \frac{M_i^{(1)} M_j^{(2)}}{e^{\beta c_{ij}}}, \quad (18)$$

Pri každej z týchto štyroch podôb GM sa pracovalo s dvomi typmi vzdialeností, a to (a) s fyzickými vzdialenosťami (km) a (b) s ekonomickými vzdialenosťami (železničné tarify, Kčs). Vzdialenosti medzi jednotlivými krajinami (získané na základe spriemerňovania skutočných vzdialeností meraných po železničných trasách) sú chápané ako vzdialenosti medzi krajskými mestami; v tých prípadoch však, kde krajské mesto leží príliš excentricky, zvolili sme iné mesto v kraji s približne stredovou polohou, čím došlo k zámene nasledovných miest: Bratislava—Nitra, Košice—Prešov, Ostrava—Hranice. Vnútrokrajové vzdialenosti sa rovnajú polomerom kruhov, ktorých plocha odpovedá ploche príslušných krajov.

Problém stanovenia vzdialeností medzi takými veľkými územnými jednotkami, ako sú kraje (resp. vnútrokrajových vzdialeností), je arbitrárna záležitosť; náš spôsob považujeme len za celkom aproximatívny. Keďže v našej štúdii je položený dôraz na kalibráciu a testovanie ako také, upustili sme od adekvátnejších, spravidla veľmi náročných spôsobov zisťovania vzdialeností. Navyše skutočnosť, že sa pracuje s pomerne veľkými územnými jednotkami, pričom celú sériu vzdialeností je potrebné nahradiť iba jednou, akousi „strednou“ vzdialenosťou, musí sa, pochopiteľne, prejaviť vo výstupe modelu; nebudeme preto požadovať prenikavú zhodu medzi skutočnými a modelom predikovanými hodnotami.

Z veľkého množstva metód či techník estimácie parametrov sme vybrali tri, a to (a) iteračnú metódu, (b) metódu najmenších štvorcov a (c) metódu maximálnej vierohodnosti (maximum likelihood procedúra), ktorá je považovaná za jednu z najadekvátnejších matematicko-štatistických metód estimácie parametrov (BATTY M., MACKIE S. 1972).

Iteračná metóda sa použila pri estimácii parametrov  $A_i$  a  $B_j$  vo vzťahoch (8) a (15). Parametre  $A_i$  a  $B_j$  sú navzájom od seba závislé, ako to vidno zo vzťahov (9) a (10), resp. (16) a (17). Pri výpočte vykazujú tendenciu konvergencie k istej limitnej hodnote. V našom prípade sa v iterácii ďalej nepokračovalo, ak rozdiel medzi iteráciou  $n$  a  $n - 1$  bol v prípade hodnôt  $A_i$  menší než  $10^{-4}$  a v prípade hodnôt  $B_j$  menší než  $10^{-8}$ .

Metóda najmenších štvorcov sa použila pri estimácii parametra  $K$  a  $\alpha$ ,  $\beta$  v modeloch (5) a (18), pričom za miery masy, t. j.  $M_i^{(1)} M_j^{(2)}$  sa vzali počty obyvateľov jednotlivých krajov. Vzťahy (5) a (18) sa najskôr upravili [násobením oboch strán rovníc výrazom  $1/(M_i^{(1)} M_j^{(2)})$ ] a potom logaritmicky transformovali, čím sa zabezpečil lineárny vzťah medzi nezávisle a závislé premennou. Výraz (5) tak nadobúda podobu

$$\ln \left( \frac{T_{ij}}{M_i^{(1)} M_j^{(2)}} \right) = \ln K - \alpha \ln (c_{ij}) \quad (19)$$

a podobne výraz (18)

$$\ln \left( \frac{T_{ij}}{M_i^{(1)} M_j^{(2)}} \right) = \ln K - \beta c_{ij}, \quad (20)$$

Je zrejmé, že táto metóda predpokladá použiť pri výpočte uvedených parametrov miesto modelom predikovaných hodnôt  $T_{ij}$  (ktoré sú pred výpočtom parametrov neznáme) skutočne nameraných hodnôt  $T_{ij}^*$ .

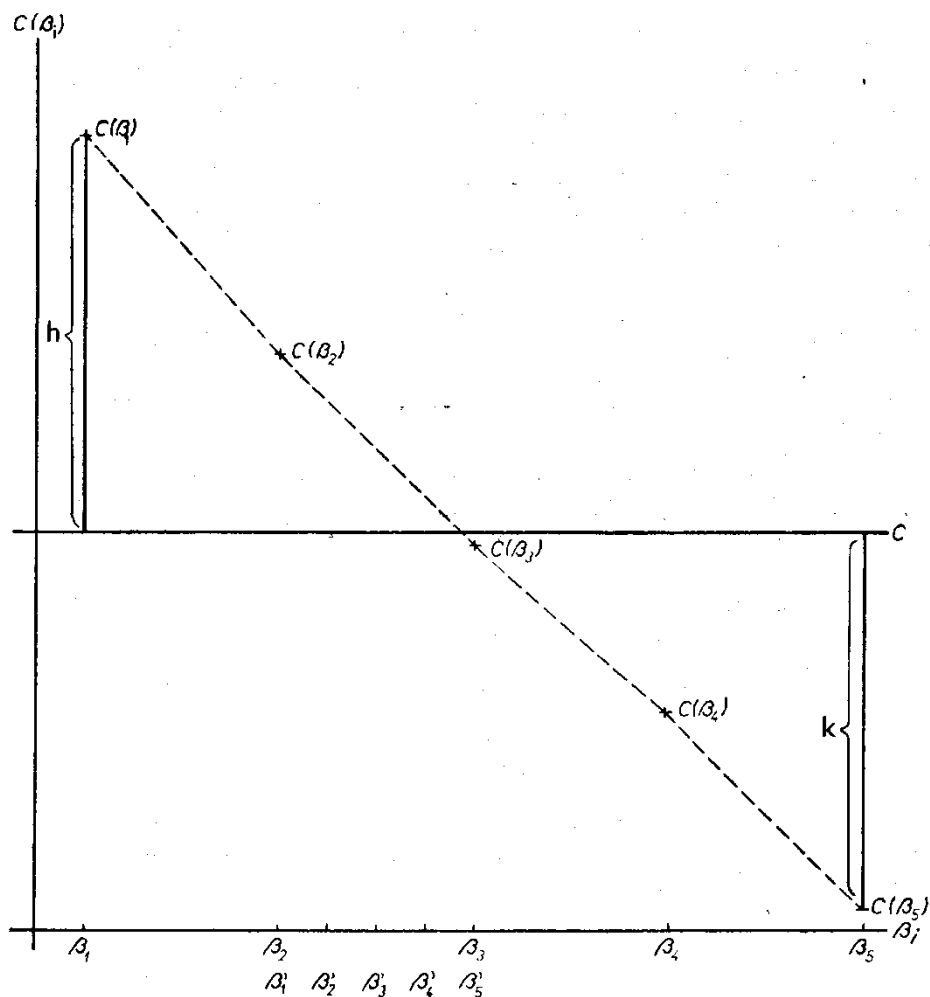
Princíp metódy maximálnej vierohodnosti spočíva v maximalizácii výrazu  $L = \prod p_{ij}^{T_{ij}^*}$  (vierohodnostná funkcia, kde  $p_{ij} = T_{ij}^*/N$ ) za určitých obmedzujúcich podmienok (BATTY M., MACKIE S. 1972). Ako vidno, daná funkcia je úmerná polynomickému rozdeleniu. Konečným produktom je stanovenie rovnice (rovníc) maximálnej vierohodnosti, na základe ktorej (ktorých) je potom možné estimovať príslušný(é) parameter (parametre). V našom prípade, kde sa jedná o estimáciu parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  sú to nasledovné rovnice (WILSON A. G. 1974, s. 319):

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \ln c_{ij} = \sum_i \sum_j T_{ij}^* \ln c_{ij}, \quad (21)$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = \sum_i \sum_j T_{ij}^* c_{ij}, \quad (22)$$

Z rovnice (21) sa estimuje parameter  $\alpha$ , vystupujúci vo vzťahoch (8) a (5) a z rovnice (22) parameter  $\beta$ , vystupujúci vo vzťahoch (15) a (18). Poznamenajme, že metóda maximálnej vierohodnosti je, ako ukázal WILSON (WILSON A. G. 1974, s. 318), v podstate identická s metódou maximalizácie entropie.

Výpočet parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  z rovníc (21), (22) prebieha na numerickom základe. Spočíva v postupnej voľbe a dosadzovaní jednotlivých hodnôt parametra  $\alpha$ , resp.  $\beta$  do rovníc (21), (22) tak, aby sme minimalizovali rozdiely medzi ľavými a pravými stranami týchto rovníc. Optimálna hodnota parametra  $\alpha$  a  $\beta$  sa dosiahne vtedy, keď rozdiely ľavých a pravých strán rovníc (21), (22) sú nulové. Pri konkrétnych výpočtoch sa zriedkakedy podarí dosiahnuť tento teoretický limit; preto je potrebné stanoviť istú hranicu, po dosiahnutí ktorej sa vo výpočte nepokračuje. Princíp nášho postupu je zachytený na *obr. 1*. Hodnoty ľavých strán rovníc (21), (22) označme všeobecne  $C'(\alpha_i)$ , resp.  $C(\beta_i)$ , pretože tieto hodnoty sú závislé na parametroch  $\alpha$ ,  $\beta$ ; hodnoty pravých strán týchto rovníc označme zase všeobecne  $C'$ , resp.  $C$ , pretože tieto hodnoty sú fixne zadané. Cieľom je nájsť bod (priesečník), pre ktorý platí  $C'(\alpha_i) = C'$ , resp.  $C(\beta_i) = C$ . K tomuto cieľu sa približujeme tak, že pre jednotlivé hodnoty parametra  $\alpha$ , resp.  $\beta$  postupne vypočítavame hodnoty  $C'(\alpha_i)$ , resp.  $C(\beta_i)$ , po čom nasleduje výpočet rozdielu  $C'(\alpha_i) - C'$ , resp.  $C(\beta_i) - C$ . Ak platí  $C'(\alpha_m) - C' > 0$  a  $C'(\alpha_{m+1}) - C' < 0$ , resp.  $C(\beta_m) - C > 0$  a  $C(\beta_{m+1}) - C < 0$ , potom tiež platí, že hľadaná hodnota parametra  $\alpha$ , resp.  $\beta$  sa bude nachádzať v intervale  $\alpha_m, \alpha_{m+1}$ , resp.  $\beta_m, \beta_{m+1}$ . Postupným zužovaním tohto intervalu dospievame k hľadanej hodnote. V našom prípade sa výpočet opakoval až sa dosiahol stav  $|C'(\alpha_m) - C'| + |C'(\alpha_{m+1}) - C'| = h + k < 0,1$ , resp.  $|C(\beta_m) - C| + |C(\beta_{m+1}) - C| = h + k < 0,1$ . Pri aplikácii metódy maximálnej vierohodnosti na estimáciu parametrov  $\alpha$ , resp.  $\beta$  vo vzťahu (5) a (18) boli hodnoty parametra  $K$  vypočítané zo vzťahu (7), resp. jeho modifikovaného tvaru tým, že výraz  $c_{ij}^{-\alpha}$  sa nahradil výrazom  $\exp(-\beta c_{ij})$ .



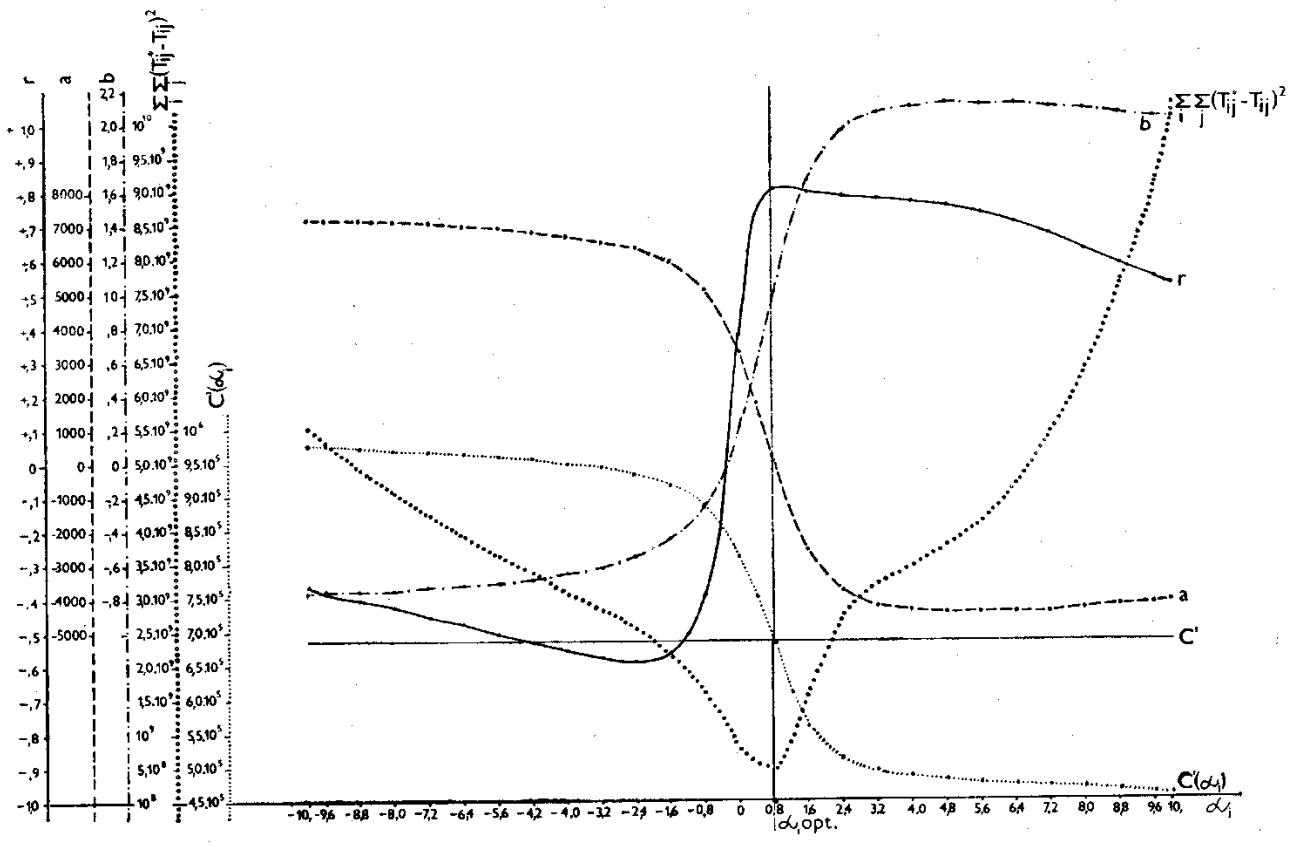
Obr. 1

Vzhľadom

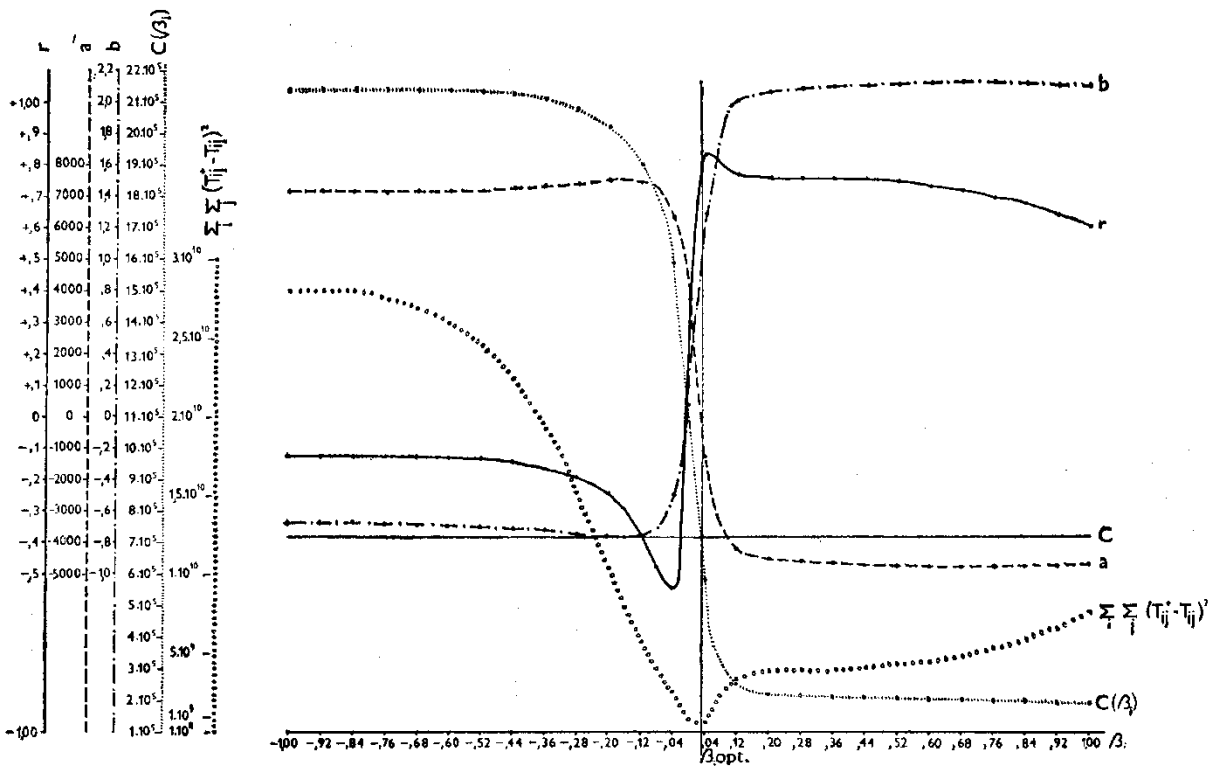
na symetriu hodnôt v migračnej matici predikovanej modelom (5), resp. (18) boli tieto hodnoty agregované do trojuholníkovej matice, ktorá má miesto 100 iba 55 prvkov (pozri priložené tabuľky). Táto symetria súvisí so skutočnosťou, že miesto hodnôt  $O_i$  a  $D_j$  sa v týchto modeloch pracuje s hodnotami  $M_i^{(1)}$  a  $M_j^{(2)}$ , pričom platí, že množina hodnôt  $M_i^{(1)}$  je identická s množinou hodnôt  $M_j^{(2)}$ .

Za účelom získania predstavy ako modelom predikované hodnoty korešpondujú so skutočne nameranými hodnotami, resp. presnejšie, ako modelom predikovaná migračná matica ako celok korešponduje so skutočnou migračnou maticou ako celkom vypočítali sa nasledovné ukazovatele:

- (1) koeficient korelácie medzi skutočne nameranými a modelom predikovanými hodnotami ( $r$ ),
- (2) koeficienty regresnej rovnice ( $a$ ,  $b$ ), ktorej nezávislé premenné sú skutočne namerané hodnoty migrácie a závislé premenné modelom predikované hodnoty migrácie (zhoda predikovaných a skutočných hodnôt by viedla k nasledovným hodnotám koeficientov:  $a = 0$ ,  $b = 1$ ),
- (3)  $\sum_i \sum_j (T_{ij} - T_{ij}^*)^2$ .



Obr. 2



Obr. 3

Tieto ukazovatele možno chápať ako „testovacie“ kritériá.1 [V anglicky písanej literatúre používajú niektorí autori (napr. WILSON A. G. 1974, s. 317) pre tieto kritériá výraz „goodness-of-fit statistics“.]

Hodnoty parametrov  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , ako aj hodnoty „testovacích“ kritérií podľa jednotlivých foriem GM, techník estimácie parametrov, fyzických či ekonomických vzdialeností a jednotlivých rokov sledovaného intervalu sú zachytené v priloženej tabuľke. Z celkového počtu jednotlivými formami GM predikovaných migračných matíc (naš postup viedol k šesťdesiatim takýmto maticiam) možno publikovať na tomto mieste iba niektoré; za účelom porovnania sme vybrali jeden rok, a to r. 1965 (pozri priložené tabuľky). (Všetky výpočty sa uskutočnili na samočinnom počítači WANG 2200, inštalovanom v Geografickom ústave SAV.)

### 3. Záver

Hoci naším hlavným cieľom nie je interpretácia získaných výsledkov, pokúsime sa o ňu aspoň v určitej sumarizovanej podobe.

(A) Vo všetkých diskutovaných formách GM parameter  $a$ , resp.  $p$  naznačuje, že „brzdíaci vplyv“ vzdialenosti na migráciu medzi československými krajinami je relatívne malý. [Poznamenávame, že hodnoty parametra  $\alpha$ , resp.  $p$  sú závislé od regionálnej mierky, „vnútronárodnosti“ či „medzinárodnosti“, charakteru interakcie a pod. (pozri bližšie MEDVEDKOV J. V. 1965, str. 72).] Migračné toky medzi krajinami „neklesajú rýchlo so vzdialenosťou; obyvateľstvo Československa sa nesťahuje len na krátke vzdialenosti, ale s „ľahkosťou“ prekonáva aj väčšie vzdialenosti. Zdá sa teda, že určité regionálne bariéry, ktoré by mohli spôsobovať rýchly pokles celkového prúdu migrácie so vzdialenosťou, napr. príliš rozdielne spoločensko-kultúrne prostredie a pod. sú nevýznamné, resp. tu pôsobia isté stimulačné faktory, ktoré podnecujú migráciu i na väčšie vzdialenosti. Významným znakom parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  je ich značná stabilita počas celého sledovaného obdobia. Táto skutočnosť naznačuje, že migračný proces medzi československými krajinami sa v sledovanom období vyznačoval istým stacionárnym charakterom (stacionarita predstavuje určitý typ rovnováhy).

(B) Parametre  $A_i$  a  $B_j$ , nazývané „bilančnými faktormi“, sú meradlami dostupnosti a kompetičnosti interagujúcich územných jednotiek (WILSON A. G. 1970). Parameter  $A_i$  je obrátenou mierou atrakčnej sily všetkých ostatných územných jednotiek, parameter  $B_j$  je zasa obrátenou mierou emanačnej sily všetkých ostatných územných jednotiek (MAC KINNON R. D. 1975). Z našich dát plynie, že všeobecne výrazne lepšie dostupné pre migráciu sú české a moravské kraje v porovnaní voči slovenským krajinám; najmä v parametri  $A_i$  je tento rozdiel zreteľný. Výnimku tvorí iba Juhočeský kraj, ktorý je zjavne „podobný“ slovenským krajinám. Maximálne hodnoty  $A_i$ ,  $B_j$  však spravidla dosahuje Východoslovenský kraj. Minimálnymi hodnotami sa vyznačuje Stredočeský, Severomoravský, resp. Juhomoravský kraj. Plynie táto väčšia dostupnosť, väčšia atrakčná a emanačná sila českých a moravských krajov z vyššej ekonomickej a sociálnej úrovne, z lepšej geografickej polohy (pri niektorých) v rámci Československa, z priaznivejšieho tvaru národného územia či osobitného funkčného postavenia v Československu (napr. Stredočeský kraj s Prahou) ?

(C) Rezíduá vykazujú značnú variabilitu (niektoré hodnoty sú pomerne vysoké). Problém vysvetlenia rezíduí je však dosť komplikovaný, poskytujúci možnosti širokého pola úvah, resp. analýz. Je potrebné si uvedomiť, že na veľkosť rezíduí vplývajú okrem iného všetky ďalšie faktory, ktoré nie sú explicitne zahrnuté v modeli (GM pracuje s tromi nezávisle premennými veličinami, a to veľkosťou máš východiskových územných jednotiek, veľkosťou máš cieľových územných jednotiek a vzdialenosťami medzi nimi, resp. v ich vnútri). Navyše, v našom prípade na veľkosť rezíduí môže vplývať aj aproximatívne stanovenie vzdialeností, ktoré je implikované skutočnosťou, že sa pracuje s relatívne veľkými územnými jednotkami, na čo sme už upozornili. Predpokladáme, že na veľkosť rezíduí vplýva tiež tá skutočnosť, že do migračných matíc bola zahrnutá i vnútrokrajová migrácia, ktorá nie je celkom dobre zmerateľná s medzikrajovou.

V tejto štúdiu nevenujeme väčšiu pozornosť vysvetľovaniu rezíduí. Pomerne značné hodnoty rezíduí sa objavujú na väzbách medzi Juhomoravským krajinám a slovenskými krajinami, v niektorých prípadoch i medzi Severomoravským, Východočeským, resp. Juhočeským krajinám a slovenskými krajinami. Medzi českými krajinami sa najväčšie rezíduá spravidla vyskytujú medzi Západočeským a Východočeským krajinám.



(D) Z „testovacích“ kritérií, na základe ktorých, ako sme už uviedli, si môžeme urobiť predstavu ako jednotlivými formami GM predikované migračné matice ako celky korešpondujú so skutočnými migračnými maticami ako celkami možno zhruba uzatvárať:

(D1) Koeficient korelácie ( $r$ ), chápaný ako deskriptívna miera tesnosti závislosti, je vo všetkých sledovaných prípadoch vysoký (JANKO J. 1948, s. 138 - 140). Ani v jednom prípade neklesá pod hodnotu 0,75, pričom jeho maximálna hodnota je 0,98; v tomto zmysle vystihujú všetky jednotlivými formami GM predikované migračné matice pomerne adekvátne základný trend v skutočných migračných dátach.

(D2) Hodnoty regresného koeficienta a ukazujú, že tie formy GM, pri ktorých sa estimácia parametrov uskutočnila metódou najmenších štvorcov, podhodnocujú dáta. V ostatných prípadoch sa jedná prevažne o nadhodnotenie dát. Parameter  $b$  sa vo všetkých sledovaných prípadoch pohybuje okolo hodnoty 1,0, čo opätovne naznačuje, že základný trend v migračných dátach sa v procese modelovania zachováva. Optimálne hodnoty oboch regresných koeficientov, t. j.  $a$ ,  $b$  sa dosiahli pri modelovej forme (8) a použití ekonomických vzdialeností.

(D3) Na základe najvýznamnejšieho „testovacieho“ kritéria,  $\sum_i \sum_j (T_{ij} - T_{ij}^*)^2$ , ale aj ostatných kritérií možno usudzovať, že tie formy GM, pri ktorých parametre  $A_i$ ,  $B_j$  nahrádzujú parameter  $K$ , predikujú migračné dáta javne bližšie k realite.

(D4) Metóda maximálnej vierohodnosti zabezpečuje pri estimácii parametrov u tých istých modelov vo všeobecnosti lepšiu zhodu predikovaných dát so skutočnými dátami.

(D5) Použitie fyzických vzdialeností vykazuje vo všeobecnosti priaznivejšie výsledky pri MGM než EGM a zároveň pri tej forme GM, kde sa nepožadujú väzby (12) a (13).

(D6) Prevalha EGM voči MGM sa vo všeobecnosti prejavuje pri použití ekonomických vzdialeností a zároveň platnosti väzieb (12) a (13).

(D7) Porovnávajúc jednotlivé roky sledovaného intervalu možno zaznamenať istú, s časom mierne narastajúcu tendenciu zlepšujúcej sa korešpondencie medzi skutočnými a jednotlivými formami GM predikovanými migračnými dátami.

#### Literatúra

BATTY M., MACKIE S., 1972: „The Calibration of Gravity, Entropy, and Related Models of Spatial Interaction“, *Environment and Planning*, 4, 205 - 233.

BEZÁK A., 1975: Niekoľko poznámok k matematickému modelovaniu v ekonomickej geografii, *Geografický časopis*, 27, 9 - 15.

JANKO J., 1948: „Jak vytváří statistika obrazy světa a života“, II, *JČMF*, Praha.

MACKINNON R. D., 1975: „A Note on the Balancing Factors Terms in Entropy-Gravity Migration Models“, IIASA, WP-75-57.

MBDVEÍKOV J. "V.", 1965: *Ekonomgeografičeskaja izučennost' rajonov kapitalističeskogo mira*, II, Itogi nauki, VINITI, ANSSSR, Moskva.

PAULOV J., 1975: Entropia a priestorová štruktúra, *Geografický časopis*, 27, 52 - 60.

WILSON A. G., 1967: A Statistical Theory of Spatial Distribution Models, *Transportation Research*, 1, 253 - 269.

WILSON A. G., 1970: *Entropy in Urban and Regional Modelling*, Pion, London.

WILSON A. G., 1974: *Urban and Regional Models in Geography and Planning*, John Wiley and Sons, London.

Adresy autorov:

JÁN PATTLOV, Katedra regionálnej geografie PvFUK 801 00 Bratislava Trnavská 1

ŠTEFAN POLÁČIK Geografický ústav SAV 800 00 Bratislava, Obrancov mieru 49

*Do nakladateľstva prišlo 12. augusta 1977.*

## Tabuľkové prílohy

Použité symboly a skratky (pozri tiež textovú časť článku):  $T_{ij}^*$ : pozorované migračné toky;  $T_{ij}$ : modelom predikované migračné toky;  $[T_{ij}^*]_{i,j=1}^{m,n}$ : matica hodnôt  $T_{ij}^*$ ;  $[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ : matica hodnôt  $T_{ij}$ ;  $K, A_1, B_1, \alpha, \beta$ : parametre gravitačného modelu;  $a, b$ : koeficienty regresnej rovnice  $T_{ij} = a + bT_{ij}^*$ ;  $r$ : koeficient korelácie medzi  $T_{ij}^*$  a  $T_{ij}$ ;  $\sum_i \sum_j (T_{ij}^* - T_{ij})^2 = s$ ;  $C'(\alpha_1) - C' = z'$ : rozdiel medzi ľavou a pravou stranou rovnice (21);  $C(\beta_1) - C = z$ : rozdiel medzi ľavou a pravou stranou rovnice (22); MNŠ: metóda najmenších štvorcov; IM: iteračná metóda; MMV: metóda maximálnej vierohodnosti; FV: fyzické vzdialenosti; EV: ekonomické vzdialenosti

*Model (5), FV, MNŠ*

	1961	1962	1963	1964	1965
<b>K</b>	$4,3466 \cdot 10^{-7}$	$4,0166 \cdot 10^{-7}$	$3,7611 \cdot 10^{-7}$	$3,9528 \cdot 10^{-7}$	$3,9059 \cdot 10^{-7}$
<b><math>\alpha</math></b>	1,0297	1,0183	1,0086	1,0171	1,0282
<b>a</b>	-298,33	-364,38	-327,68	-425,50	-377,99
<b>b</b>	1,1656	1,1888	1,1753	1,1964	1,1970
<b>r</b>	0,8289	0,8265	0,8324	0,8431	0,8484
<b>s</b>	6110933087	597336315	554276681	50906938	497117273

*Model (5), FV, MNV*

	1961	1962	1963	1964	1965
<b>K</b>	$2,8803 \cdot 10^{-7}$	$2,3980 \cdot 10^{-7}$	$2,4575 \cdot 10^{-7}$	$2,4816 \cdot 10^{-7}$	$2,3985 \cdot 10^{-7}$
<b><math>\alpha</math></b>	0,9623	0,9303	0,9386	0,9386	0,9463
<b>a</b>	-51,548	-38,413	-66,812	-122,35	-83,535
<b>b</b>	1,0121	1,0092	1,0161	1,0289	1,0208
<b>r</b>	0,8256	0,8217	0,8286	0,8392	0,8446
<b>s</b>	445625446	416239844	400078205	388538866	342648435
<b>z'</b>	-0,0007	-0,0028	-0,0046	-0,0007	0,0016

Model (8), FV, MMV, IM

	1961	1962	1963	1964	1965
$\alpha$	1,4214	1,3855	1,4020	1,3966	1,4059
$a$	141,87	135,78	138,17	131,50	120,26
$b$	0,9394	0,9409	0,9360	0,9435	0,9456
$r$	0,9836	0,9828	0,9824	0,9832	0,9847
$s$	35510607	33934534	34729196	33740773	28879482
$z'$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Model (5), EV, MNŠ

	1961	1962	1963	1964	1965
$K$	$7,0033 \cdot 10^{-8}$	$6,4375 \cdot 10^{-8}$	$6,2381 \cdot 10^{-8}$	$6,4170 \cdot 10^{-8}$	$6,1129 \cdot 10^{-8}$
$\alpha$	1,0090	0,9910	0,9880	0,9926	0,9990
$a$	-858,396	-872,728	-850,038	-929,811	-866,897
$b$	1,3263	1,3324	1,3277	1,3404	1,3411
$r$	0,7928	0,7888	0,7938	0,8005	0,8086
$s$	1083429811	1024129021	983815116	994389302	887514393

Model (5), EV, MMV

	1961	1962	1963	1964	1965
$K$	$3,1632 \cdot 10^{-8}$	$2,8407 \cdot 10^{-8}$	$2,8592 \cdot 10^{-8}$	$2,8589 \cdot 10^{-8}$	$2,7050 \cdot 10^{-8}$
$\alpha$	0,7828	0,7580	0,7651	0,7619	0,7671
$a$	189,205	214,420	185,867	164,447	171,654
$b$	0,9556	0,9487	0,9553	0,9611	0,9573
$r$	0,7859	0,7804	0,7862	0,7939	0,8022
$s$	528449961	493028736	480230089	473989184	416411681
$z'$	-0,0008	0,0031	0,0032	0,0002	0,0057

Model (8), EV, MMV, IM

	1961	1962	1963	1964	1965
$\alpha$	1,1839	1,1593	1,1714	1,1655	1,1707
$a$	-8,8870	-10,3339	-7,3089	-5,3648	-5,7554
$b$	1,0038	1,0045	1,0032	1,0023	1,0026
$r$	0,9742	0,9741	0,9730	0,9715	0,9759
$s$	57528595	53154049	55246435	59629599	50917724
$z'$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Model (18), FV, MNŠ

	1961	1962	1963	1964	1965
$K$	$4,9172 \cdot 10^{-9}$	$4,8285 \cdot 10^{-9}$	$4,6538 \cdot 10^{-9}$	$4,7192 \cdot 10^{-9}$	$4,4958 \cdot 10^{-9}$
$\beta$	0,0037	0,0037	0,0036	0,0037	0,0037
$a$	1020,95	943,19	978,49	919,33	887,82
$b$	0,7292	0,7562	0,7394	0,7551	0,7599
$r$	0,7839	0,7830	0,7850	0,8000	0,8063
$s$	380069093	357265084	347226830	332917328	301424154

*Model (18), FV, MMV*

	1961	1962	1963	1964	1965
K	6,2025 . 10 <sup>-9</sup>	5,8374 . 10 <sup>-9</sup>	5,7698 . 10 <sup>-9</sup>	5,8454 . 10 <sup>-9</sup>	5,5297 . 10 <sup>-9</sup>
$\beta$	0,0049	0,0047	0,0047	0,0048	0,0049
a	429,38	425,06	413,72	349,61	346,47
b	0,8992	0,8983	0,9005	0,9173	0,9139
r	0,8182	0,8130	0,8191	0,8325	0,8375
s	381342388	360298559	345938623	331080553	296614527
z	0,0016	-0,0026	-0,0014	-0,0063	-0,0030

*Model (15), FV, MMV, IM*

	1961	1962	1963	1964	1965
$\beta$	0,0071	0,0068	0,0069	0,0069	0,0070
a	651,76	636,46	640,36	632,80	583,23
b	0,7217	0,7232	0,7201	0,7281	0,7364
r	0,9131	0,9115	0,9101	0,9136	0,9196
s	192645278	178615704	181362034	178209316	157125541
z	-0,0022	-0,0050	-0,0232	-0,0038	-0,0143

*Model (18), EV, MNS*

	1961	1962	1963	1964	1965
K	8,2065 . 10 <sup>-9</sup>	7,8471 . 10 <sup>-9</sup>	7,6780 . 10 <sup>-9</sup>	7,8135 . 10 <sup>-9</sup>	7,4065 . 10 <sup>-9</sup>
$\beta$	0,0314	0,0311	0,0307	0,0310	0,0314
a	-229,51	-295,17	-242,38	-336,67	-297,43
b	1,1417	1,1645	1,1461	1,1671	1,1692
r	0,8173	0,8165	0,8187	0,8286	0,8341
s	630132168	607240808	573774503	574570118	519985536

*Model (18), EV, MMV*

	1961	1962	1963	1964	1965
K	7,0196 . 10 <sup>-9</sup>	6,5375 . 10 <sup>-9</sup>	6,5466 . 10 <sup>-9</sup>	6,6108 . 10 <sup>-9</sup>	6,2079 . 10 <sup>-9</sup>
$\beta$	0,0290	0,0280	0,0283	0,0282	0,0285
a	47,861	63,359	45,692	-5,4996	22,295
b	0,9888	0,9848	0,9890	1,0013	0,9945
r	0,8136	0,8114	0,8144	0,8244	0,8300
s	465446687	427589538	421386500	412357951	364889991
z	-0,0071	0,0034	0,0082	0,0004	-0,0010

*Model (15), EV, MMV, IM*

	1961	1962	1963	1964	1965
$\beta$	0,0437	0,0426	0,0431	0,0429	0,0431
a	109,63	106,73	108,84	101,25	92,240
b	0,9532	0,9536	0,9524	0,9565	0,9583
r	0,9869	0,9860	0,9858	0,9861	0,9870
s	28034764	27383421	27994479	27740734	24324974
z	-0,0076	-0,0018	-0,0030	-0,0050	-0,0032



**Matica ekonomických vzdáleností**  
(železničné tarify — Kčs)

	St. č.	J. č.	Z. č.	Sv. č.	V. č.	J. m.	S. m.	Z. s.	S. s.	V. s.
Stredočeský	9.2	39.0	31.6	28.0	31.6	51.8	62.4	71.6	77.6	86.4
Juhočeský		9.2	36.0	55.2	51.8	47.4	66.0	71.6	77.6	86.4
Západočeský			8.4	39.0	46.0	66.0	68.8	77.6	83.4	92.2
Severočeský				7.0	46.0	66.0	71.6	74.6	83.4	92.2
Východočeský					8.4	40.4	46.0	68.8	71.6	80.4
Juhomoravský						10.0	33.0	46.0	62.4	74.6
Severomoravský							8.4	50.2	50.2	68.8
Západoslovenský								10.0	36.0	66.0
Stredoslovenský									11.2	47.4
Východoslovenský										10.6

[T<sub>ij</sub>]<sub>i,j=1</sub><sup>m,n</sup>, r. 1965

11900										
3838	4618									
6241	2615	8792								
9855	1621	4726	10039							
6245	1149	1866		7818						
3478	2304	2710	2023	3332	12048					
3070	1110	1832	2143	3007	11302	18186				
1559	791	1536	1472	1161	2387	3569	12045			
948	375	819	836	549	1074	3783	8796	6900		
922	353	1260	1435	674	703	2630	2802	3429	6691	

Model (5), FV, MNŠ, [T<sub>ij</sub>]<sub>i,j=1</sub><sup>m,n</sup>

26040.4										
2988.7	2114.3									
5976.9	1276.1	3682.5								
7971.0	915.0	1879.3	7319.8							
7848.4	1018.4	1568.3	2037.7	7235.8						
5891.5	1877.8	1524.6	2054.0	4432.5	16035.7					
4242.0	1125.1	1210.1	1504.7	3201.3	9007.2	14835.2				
3101.9	936.1	970.5	1363.5	1967.0	5407.7	4335.5	14573.9			
2019.6	553.3	645.0	828.9	1267.7	2647.4	3197.4	5766.9	7329.1		
1397.1	381.7	453.5	592.4	844.5	1609.8	1852.7	2027.8	2384.6	5793.7	

Model (5), FV, MMV, [T<sub>ij</sub>]<sub>i,j=1</sub><sup>m,n</sup>

30311.3										
3216.3	2462.1									
6673.1	1389.9	4295.3								
8917.9	964.4	2021.4	8656.0							
8707.8	1055.8	1649.1	2142.2	8429.4						
6122.2	1970.7	1645.2	2074.7	4751.9	18448.1					
4327.5	1140.9	1206.6	1559.2	3370.3	9956.7	17294.3				
3063.8	929.4	944.4	1335.6	1975.0	5689.6	4520.1	16786.3			
1972.3	538.6	621.7	798.0	1257.4	2687.0	3331.7	6290.7	8375.8		
1338.0	364.3	429.2	560.9	818.7	1584.5	1864.4	2045.8	2503.5	6649.9	

Model (5), EV, MNŠ, [T<sub>ij</sub>]<sub>i,j=1</sub><sup>m,n</sup>

35039.6										
2353.1	2831.6									
3795.6	947.2	5299.0								
5577.6	804.8	1488.5	10781.3							
5358.8	929.7	1368.5	1782.1	10562.3						
5235.1	1626.2	1527.2	1988.7	3520.7	22734.1					
3873.0	1041.0	1305.4	1633.6	2755.5	6145.9	21484.1				
3587.2	1019.7	1230.0	1666.1	1958.5	4686.7	3827.0	20381.2			
2456.1	698.2	849.3	1105.9	1396.4	2564.3	2839.6	4206.2	10020.0		
1913.0	543.8	666.2	867.5	1078.4	1860.2	1797.1	1990.6	2055.9	7959.7	



$[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ,  $r. 1965$

11900	1615	2832	4069	2621	1359	1423	627	351	300
2223	4618	1318	714	519	1149	593	404	118	147
3409	1297	8792	2001	789	1136	988	607	324	394
5786	907	2725	10039	2053	974	1203	659	340	479
3624	630	1077	1806	7818	1782	1825	471	220	192
2119	1155	1574	1049	1550	12048	7064	1166	411	312
1674	517	844	940	1182	4238	18186	1262	1158	957
932	387	929	813	690	1221	2307	12045	3877	1258
597	257	495	496	329	663	2625	4919	6900	2050
622	206	866	956	482	391	1673	1544	1379	6691

*Model (8), FV, IM, MMV,  $[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$*

10536.8	1450.2	4244.2	4109.4	2995.5	1281.4	1355.7	557.3	321.8	244.4
1898.9	3896.8	1923.6	740.7	647.8	1053.2	848.1	422.3	211.3	159.8
4654.7	1611.1	8130.8	1889.2	1077.1	743.5	827.3	390.1	232.2	180.7
5897.4	811.9	2472.2	11764.8	1312.7	870.1	1001.1	534.0	278.5	222.0
4238.5	700.1	1389.6	1294.3	6344.4	2006.5	2132.7	676.9	385.0	276.5
2033.2	1276.2	1075.7	962.0	2250.1	9957.2	7284.7	2234.0	844.6	529.7
1405.6	671.5	782.1	723.2	1562.7	4760.1	17219.0	1812.0	1259.1	735.1
933.0	540.0	595.5	622.9	800.9	2357.2	2925.8	11598.6	3196.0	883.4
729.1	365.5	479.7	439.6	616.5	1205.9	2751.4	4325.2	6746.4	1671.0
531.2	265.2	358.1	336.2	424.7	725.5	1540.8	1153.2	1602.7	7871.7

*Model (8), EV, IM, MMV,  $[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$*

13914.6	1182.0	2394.9	2457.4	1886.8	1400.8	1683.3	991.6	634.0	551.1
1635.7	4089.1	1311.0	707.9	674.6	991.1	1005.2	632.3	404.3	351.4
2778.3	1099.1	9564.2	1411.6	1029.3	893.1	1271.2	764.0	493.4	432.4
3861.7	803.9	1912.1	12721.9	1241.7	1077.5	1463.7	965.3	595.2	521.7
2828.1	730.7	1329.8	1184.4	7670.6	1615.1	2073.2	895.5	600.4	516.8
2336.2	1194.5	1283.9	1143.5	1797.1	12201.9	4506.2	2113.7	1039.2	831.2
1612.5	695.9	1049.7	892.2	1325.0	2588.4	19193.8	1637.8	1150.7	784.3
1621.4	701.1	1010.5	942.5	916.6	1944.6	2623.3	12003.1	1882.4	912.6
1335.1	615.3	895.5	797.6	843.5	1312.2	2529.5	2583.4	7121.6	1296.6
1034.8	476.9	699.9	623.4	647.3	935.7	1537.2	1116.8	1156.1	6581.3

*Model (15), FV, IM, MMV,  $[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$*

7669.6	1942.7	4849.6	5227.5	3327.8	1688.1	1701.6	431.3	179.3	79.3
2443.0	2430.8	2382.6	1088.7	783.9	1291.8	912.8	330.1	97.9	41.1
5256.4	2053.5	5904.8	3103.7	1491.2	817.3	778.8	208.8	86.8	35.5
6997.5	1158.9	3833.1	8721.2	1493.8	993.0	997.4	365.8	106.9	47.3
4558.7	853.9	1884.7	1989.2	3907.8	2410.5	2796.8	638.0	279.6	125.5
2651.0	1613.2	1184.2	1164.9	2763.3	6984.4	7945.5	2913.9	864.3	362.8
1931.6	824.0	815.6	845.8	2317.6	6743.6	13018.3	2744.7	1802.7	886.5
743.2	452.2	331.9	470.8	802.4	3197.0	4165.8	9334.5	3927.7	1032.8
416.1	180.6	185.8	185.4	473.6	1277.1	3684.7	5289.6	5276.0	2361.2
191.5	78.8	79.2	85.3	221.1	557.7	1884.9	1446.9	2456.2	7807.5

*Model (15), EV, IM, MMV,  $[T_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$*

11444.0	1563.9	3471.5	3986.3	2629.2	1413.7	1389.5	629.6	330.1	239.2
2061.0	3683.4	1870.0	803.1	716.4	1113.1	774.8	410.0	215.0	155.8
3867.8	1581.0	8387.9	2203.0	1254.8	680.5	936.4	431.7	228.3	165.4
5724.5	875.1	2839.5	11100.0	1590.0	862.3	1051.6	622.6	289.3	209.6
3732.6	771.7	1598.9	1571.9	6130.7	1931.4	2416.3	609.0	366.5	265.6
2281.0	1362.9	985.5	968.9	2252.0	10740.6	6183.6	2378.4	796.2	498.2
1427.7	604.1	863.6	752.4	1748.9	3937.8	17668.3	1962.1	1332.6	632.7
1030.6	509.3	634.2	709.7	702.1	2412.7	3125.4	11928.6	2639.4	766.4
754.0	372.6	468.1	460.2	589.8	1127.2	2962.4	3683.4	7292.1	1620.5
535.4	264.6	332.3	326.7	418.7	691.1	1378.2	1048.0	1587.9	8226.1